DIE INFINITESIMALEN TRANSFORMATIONEN, WELCHE EINEN PFAFFSCHEN AUSDRUCK ABSOLUT ODER MODULO EINES VOLLSTÄNDIGEN DIFFERENTIALS INVARIANT LASSEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

FRANZ WINKLER

AUS LEIPZIG.

LEIPZIG,

DRUCK VON METZGER & WITTIG

1905.

Vorliegende Arbeit soll eine Fortsetzung jener von Professor Friedrich Engel: „Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaffschen Gleichung“[1] bilden.

Herr Professor Engel

hat mir in vorliegender Schrift mehrfach mit Rat und Hilfe zur Seite gestanden und es sei ihm auch an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen.

Lie hat über das vorliegende Problem nichts veröffentlicht. Teilweise finden sich Anklänge an vorliegende Schrift bei Vivanti und bei v. Weber.[2]

Franz Winkler.

---

[1] Berichte der math.-phys. Klasse der K. Gesellschaft der Wissenschaften 1899, S. 303 ff.

[2] v. Weber, Das Pfaffsche Problem.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Mayer und **Hölder.**

Leipzig, den 22. Februar 1905.

Der Prokanzellar.
Seeliger.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Sätze, Bedingungsgleichungen.

§ 1. Charakteristische Funktionen, Identitäten.

Vorgelegt sei der Pfaffsche Ausdruck:

$$1) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_\nu (x_1, \ldots x_n)\, d x_\nu .$$

Durch die endliche Transformation:

$$2) \qquad x_\nu' = F_\nu (x_1 \ldots x_n)$$

werde Δ' in $c\,\Delta + d\,\omega (x_1, \ldots x_n)$ übergeführt, so daß vermöge 2) eine Gleichung von der Form:

$$3) \qquad \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_\nu (x')\, d x_\nu' = c \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_\nu (x)\, d x_\nu + d\,\omega (x_1, \ldots x_n)$$

oder kurz:

$$3') \qquad \Delta' = c\,\Delta + d\,\omega$$

besteht. Hierbei ist unter c eine Konstante verstanden. — Es sei ferner:

$$4) \qquad X(f) = \sum_1^n{}^{\nu} \xi_\nu (x_1, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

eine infinitesimale Transformation, welche auf Δ ausgeführt ergibt:

$$5) \qquad X(\Delta) = c_1\, \Delta + d\, u (x_1, \ldots x_n),$$

unter c_1 ebenfalls eine Konstante verstanden. — Denken wir uns jetzt vermöge 2) in $X(f)$ die Variabeln $x_1', \ldots x_n'$ eingeführt, so erhält $X(f)$ die neue Form:

$$6) \qquad X(f) = \sum_1^n{}^{\nu} \bar{\xi}_\nu (x_1', \ldots x_n') \equiv \bar{X}(f).$$

Die Zuwüchse, welche $X(f)$ und $\bar{X}(f)$ den Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ erteilen, sind somit:

$$7) \qquad \begin{cases} \delta x_\nu = \xi_\nu (x_1, \ldots x_n)\, \delta t \\ \delta x_\nu' = \bar{\xi}_\nu (x_1', \ldots x_n')\, \delta t \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots n.$$

Zwischen diesen Zuwüchsen bestehen dieselben Beziehungen wie zwischen den Differentialen, so daß auch eine Gleichung von der Form:

$$8) \qquad \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x') \bar{\xi}_\nu(x') = c \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x) \xi_\nu(x) + X(\omega(x))$$

besteht. $\bar{X}(f)$ auf Δ' ausgeführt, ergibt für Δ' ebenfalls die Form $C\Delta' + d\Omega'$, wie sich leicht rechnerisch ergibt. Es ist:

$$X(f) = \bar{X}(f)$$
$$X(\Delta) = c_1 \Delta + d u(x_1, \ldots x_n).$$

Führen wir hier 2) ein, so ergibt sich:

$$\bar{X}(\Delta') = c(c_1 \Delta + d u) + d X(\omega)$$
$$\bar{X}(\Delta') = c_1 \Delta' + d \Omega'.$$

8) läßt erkennen, daß zu jeder infinitesimalen Transformation $X(f)$, welche auf einen Pfaffschen Ausdruck Δ ausgeführt die Form $C\Delta + d\Omega$ ergibt, ein Ausdruck:

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x) \xi_\nu(x)$$

gehört, welcher sich bei jeder endlichen Transformation, die Δ in die Form $C\Delta + d\Omega$ transformiert, genau ebenso verhält wie der Pfaffsche Ausdruck $\Delta = \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x) d x_\nu$ selbst. Wir bezeichnen daher nach Lie:

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x) \xi_\nu(x) = - U$$

als charakteristische Funktion von $X(f)$. 8) zeigt, wie sich die charakteristische Funktion von $X(f)$ ändert, wenn wir neue Variabele in $X(f)$ einführen vermöge einer endlichen Transformation, welche Δ in die Form $C\Delta + d\Omega$ überführt.

Ist eine weitere infinitesimale Transformation gegeben durch:

$$9) \qquad x'_\nu = x_\nu + \eta_\nu(x_1, \ldots x_n)\delta t \qquad \nu = 1, \ldots n$$

oder in Lies symbolischer Bezeichnung:

$$Y(f) = \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

so sei:

$$Y(\Delta) \equiv c_2 \Delta + d v(x_1, \ldots x_n),$$

so daß vermöge 9) die Gleichung:

$$\Delta' = (1 + c_2 \delta t)\Delta + d v \delta t$$

besteht, entsprechend der Gleichung 3'). Zu $Y(f)$ gehört die charakteristische Funktion:

$$V = -\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu(x)\,\eta_\nu(x).$$

Denken wir uns vermöge $Y(f)$ in $X(f)$ die neuen Variabeln x_ν' eingeführt, so wird bekanntlich:

10) $$X(f) = X'(f) + \delta t(X'\,Y') \equiv \bar{X}(f)$$

falls wir setzen:

$$X'(f) = \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu(x') \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}$$

$$Y'(f) = \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu(x') \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}$$

$$(X'\,Y') = X'\big(Y'(f)\big) - Y'\big(X'(f)\big).$$

$(X'\,Y')$ läßt Δ', oder, was dasselbe ist, $(X\,Y)$ läßt Δ invariant modulo eines vollständigen Differentials. Es ergibt sich nämlich für $f = \Delta$:

$$(X\,Y)_{f=\Delta} = X(c_2\,\Delta + d\,v) - Y(c_1\,\Delta + d\,u)$$
$$(X\,Y)_{f=\Delta} = c_2\,(c_1\,\Delta + d\,u + d\,X(v) - c_1\,(c_2\,\Delta + d\,v) - d\,Y(u)$$
$$(X\,Y)_{f=\Delta} = c_2\,d\,u - c_1\,d\,v + d\,X(v) - d\,Y(u)$$
$$(X\,Y)_{f=\Delta} \equiv d\,\gamma.$$

Somit läßt $(X\,Y)$ Δ invariant modulo eines vollständigen Differentials. — Es handelt sich jetzt darum, die charakteristische Funktion von:

11) $$\left\{\begin{aligned} (XY) &= X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) \\ &= \sum_1^n{}_\nu \big(X(\eta_\nu) - Y(\xi_\nu)\big) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \equiv Z(f) \end{aligned}\right.$$

zu bestimmen. Dieselbe sei W. Dann ist nach 11) und nach der Definition der charakteristischen Funktion:

12) $$W = -\sum_1^n{}_\nu \big(X(\eta_\nu) - Y(\xi_\nu)\big)\,\alpha_\nu.$$

Nach 10) hat die charakteristische Funktion von $\bar{X}(f)$ den Wert:

$$U' + \delta t\,W',$$

wo:

$$U' = U(x')$$
$$W' = W(x')$$

gesetzt ist. Nach 3′) und 8) ist aber die charakteristische Funktion W' auch gleich:

$$U(1 + c_2 \delta t) + X(v)\delta t .$$

Da nun:

$$U' = U + \delta t\, Y(U)$$
$$W' = W + \delta t\, Y(W)$$

ist, so haben wir das Bestehen der Relation:

$$U + \delta t\big(Y(U) + W\big) = U(1 + c_2 \delta t) + X(v)\delta t$$

unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder 2. Ordnung. Hieraus folgt sofort:

13) $$W = c_2 U + X(v) - Y(U)$$

oder:

Satz I: *Sind $X(f)$ und $Y(f)$ zwei infinitesimale Transformationen, vermöge deren besteht:*

$$X(\Delta) = c_1 \Delta + d u(x), \qquad Y(\Delta) = c_2 \Delta + d v(x)$$

und sind U und V die zugehörigen charakteristischen Funktionen, und setzt man ferner:

$$(X Y) \equiv Z(f),$$

so ist:

$$Z(\Delta) = c_2 d u - c_1 d v + d X(v) - d Y(U)$$

und die zu $Z(f)$ gehörige charakteristische Funktion hat den Wert:

13) $$W = c_2 U + X(v) - Y(U). \quad —$$

Vertauscht man $X(f)$ mit $Y(f)$, also auch U mit V, c_1 mit c_2 und u mit v, so muß man nach 12) „W“ durch „$-W$“ ersetzen, so daß sich ergibt:

14) $$W = - c_1 V - Y(u) + X(V).$$

Aus 13) und 14) folgt:

15) $$X(V) + Y(U) = c_2 U + c_1 V + Y(u) + X(v).$$

Wir haben hiermit den Satz gewonnen:

Satz II: *Sind U und V die charakteristischen Funktionen zweier infinitesimalen Transformationen $X(f)$ und $Y(f)$, für welche Identitäten von der Form:*

$$X(\Delta) = c_1 \Delta + d u, \qquad Y(\Delta) = c_2 \Delta + d v$$

bestehen, so ist identisch:

$$X(V) + Y(U) = c_2 U + c_1 V + Y(u) + X(v).$$

Im speziellen ergibt sich für $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $d u(x) = 0$, $d v(x) = 0$ aus Satz I und Satz II:

Satz III: *Sind $X(f)$ und $Y(f)$ zwei infinitesimale Transformationen, vermöge deren besteht:*

$$X(\Delta) \equiv 0, \qquad Y(\Delta) \equiv 0$$

und sind U und V die zugehörigen charakteristischen Funktionen, setzt man endlich

$$(XY) \equiv Z(f),$$

so ist auch:

$$Z(\Delta) \equiv 0$$

und die zu $Z(f)$ gehörige charakteristische Funktion hat den Wert:

16) $$W = -\,Y(U).$$

Satz IV: *Sind U und V die charakteristischen Funktionen zweier infinitesimaler Transformationen $X(f)$ und $Y(f)$, für welche Identitäten von der Form:*

$$X(\Delta) \equiv 0, \qquad Y(\Delta) \equiv 0$$

bestehen, so ist identisch:

17) $$X(V) + Y(U) \equiv 0.$$

§ 2. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

I. Bedingungsgleichungen für $X(\Delta) \equiv 0$.

Soll $X(f)$ mit der charakteristischen Funktion

$$U = -\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu \xi_\nu$$

den Pfaffschen Ausdruck Δ absolut invariant lassen, so ist notwendig und hinreichend, daß:

$$X(\Delta) \equiv 0$$

ist, d. h.:

18) $$X\left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu d x_\nu\right) \equiv 0.$$

Hieraus folgt sofort als Bedingung:

19) $$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu d\xi_\nu + \sum_1^n{}_{\mu,\nu} d x_\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} \xi_\mu \equiv 0.$$

Aus dem Werte der charakteristischen Funktion folgt:

$$U = -\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu \xi_\nu$$

$$dU = -\sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} d x_\mu - \sum_1^n{}_{\mu,\nu} \alpha_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\mu} d x_\mu$$

20) $$dU = -\sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} d x_\mu - \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu d\xi_\nu$$

oder nach 19), da μ mit ν vertauschbar:

$$21) \qquad \sum_1^n{}_{\mu,\nu} d x_\mu \xi_\nu \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} \right) \equiv d U.$$

Setzen wir hier noch:

$$22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \dfrac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} \equiv \alpha_{\mu\nu}, \\ \alpha_\nu = \alpha_{o\nu} = -\alpha_{\nu o}, \end{cases}$$

so wird 21):

$$\sum_1^n{}_{\mu,\nu} d x_\mu \xi_\mu \alpha_{\mu\nu} \equiv d U$$

$$23) \qquad \sum_1^n{}_{\mu,\nu} d x_\mu \xi_\mu \alpha_{\mu\nu} \equiv \sum_1^n{}_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu} d x_\mu,$$

welche Identität in n Gleichungen zerfällt:

$$24) \qquad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Wir haben somit $\xi_1, \ldots \xi_n$, U so zu bestimmen, daß die $n + 1$-Gleichungen:

$$25) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{o\nu} \xi_\nu = -U \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = \dfrac{\partial U}{\partial x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n$$

erfüllt werden.

II. Bedingungsgleichungen für $X(\Delta) \equiv d\,\omega(x)$.

Soll durch die infinitesimale Transformation $X(f)$, zu welcher die § 1 erklärte charakteristische Funktion

$$U = -\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu \xi_\nu$$

gehört, der Pfaffsche Ausdruck Δ invariant bleiben modulo eines vollständigen Differentials, so muß die Bedingung bestehen:

$$X\left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu d x_\nu \right) \equiv d\,\omega(x_1, \ldots x_n),$$

d. g.

$$\sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} d x_\mu + \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu d \xi_\nu \equiv d\,\omega(x).$$

Vermittelst der charakteristischen Funktion U ergibt sich durch Einführung von dU aus 20) für die letzte Identität:

$$26) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{\mu,\nu} \xi_\nu \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} \right) dx_\mu \equiv d\omega(x) + dU.$$

Machen wir im folgenden auch von der Bezeichnung 22) Gebrauch, so zerfällt 26) sofort in:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = \frac{\partial (U+\omega)}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Somit haben wir zur Bestimmung von $\xi_1, \ldots \xi_n$, U, ω folgende $(n+1)$-Bedingungsgleichungen:

$$27) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_{o\nu} \xi_\nu = -U \\ \text{b)} \quad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = \frac{\partial (U+\omega)}{\partial x_\mu}. \end{cases} —$$

Wir müssen noch die Bedingungsgleichungen für:

$$X(\Delta) \equiv c\,\Delta$$

ableiten.

III. Bedingungsgleichungen für $X(\Delta) \equiv c\,\Delta$.

Soll der Pfaffsche Ausdruck:

$$\Delta \equiv \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu dx_\nu$$

durch die infinitesimale Transformation $X(f)$, zu der die charakteristische Funktion:

$$U = -\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu \xi_\nu$$

gehört, invariant bis auf einen konstanten Faktor bleiben, so ist notwendig und hinreichend, daß eine Gleichung von der Form:

$$X\left(\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu dx_\nu \right) \equiv c \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu dx_\nu$$

besteht, d. h.

$$28) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{\mu,\nu} \xi_\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} dx_\nu + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu d\xi_\nu \equiv c \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_\nu dx_\nu.$$

Vermittelst der charakteristischen Funktion U ergibt sich durch Einführung von dU aus 20) für die letzte Identität:

$$dU + \sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\nu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu - \sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} dx_\nu = c \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu dx_\nu.$$

Dies gibt unter Einführung von 22):

$$\sum_1^n{}_{\mu,\nu} \xi_\nu \alpha_{\mu\nu} dx_\mu \equiv c \sum_1^n{}_\mu \alpha_{o\mu} dx_\mu + dU$$

$$\equiv c \sum_1^n{}_\mu \alpha_{o\mu} dx_\mu + \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu,$$

welche Identität sofort zerfällt in:

$$29) \qquad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = c\,\alpha_{o\mu} + \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, \ldots n,$$

so daß wir zur Bestimmung von $\xi_1, \ldots \xi_n$, U folgende Bedingungsgleichungen haben:

$$30) \quad \begin{cases} \text{a)} \ \sum_1^n{}_\nu \alpha_{o\nu} \xi_\nu = -U \\ \text{b)} \ \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = c\,\alpha_{o\mu} + \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

§ 3. Jacobisches Symbol.

Wir stoßen bei unseren Betrachtungen auf schiefe Determinanten, für welche $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ gilt. Wir wollen unsere Resultate jedoch besser mit Hilfe der Jacobischen Symbole geben und uns besonders an die Abhandlung von Prof. Friedrich Engel (math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1899, S. 303) anschließen.

Unter der Voraussetzung, daß allgemein gilt:

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$$

setzen wir:

$$\alpha_{\mu\nu} \equiv (\mu\,\nu).$$

Dann wird durch die Rekursionsformel:

$$31) \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_{2l}) = \sum' (i_1\, i_2)(i_3 \ldots i_{2l})$$

das Jacobische Symbol $(i_1 \ldots i_{2l})$ erklärt, wo $i_1, \ldots i_{2l}$ irgend $2l$ der Zahlen $1 \ldots n$ sind und wo durch das Summenzeichen angedeutet wird, daß die Summe aller der Ausdrücke zu bilden ist, die zu dem hingeschriebenen hinzukommen, wenn man die $2l-1$ letzten Zahlen $i_2, \ldots i_{2l}$ einmal, zweimal $\ldots (2l-1)$-mal zyklisch vertauscht. Der Ausdruck $(\mu\,\nu)$ wechselt das Vorzeichen, wenn man μ mit ν vertauscht. Der Ausdruck $(i_1, \ldots i_{2l})$ wechselt

daher das Zeichen, wenn man irgend zwei der $2l$ Zahlen $i_1, \ldots i_{2l}$ miteinander vertauscht und wenn man alle $2l$ Zahlen $i_1, \ldots i_{2l}$ zyklisch vertauscht. Ferner verschwindet der Ausdruck $(i_1, \ldots i_{2l})$ identisch, sobald zwei der Zahlen $i_1, \ldots i_{2l}$ gleich sind. Setzt man daher:

$$(i_1, \ldots i_{2l}) \equiv J,$$

so wird für $\mu = 1, \ldots 2l$

$$i_\mu, i_{\mu+1}, \ldots i_{2l}, i_1, \ldots i_{\mu-1}) = (-1)^{\mu-1} J,$$

wo man auf der linken Seite $i_{\mu+1}, \ldots i_{2l}, i_1, \ldots i_{\mu-1}$ zyklisch vertauschen darf, ohne den Wert des Ausdruckes zu ändern. Man kann daher J in der Form geben:

$$J = \sum_1^{2l} {}_\nu (i_\mu i_\nu) J_{\mu\nu} = (i_1, \ldots i_{2l}),$$

wo $J_{\nu\mu} = 0$ ist und $J_{\mu\nu}$ ein Jacobisches Symbol darstellt. Hieraus folgt auch sofort:

$$J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu} = 0.$$

Für jede beliebige Zahl i_λ der Reihe $1, \ldots n$ gilt die Formel:

$$\sum_1^{2l} {}_\nu (i_\lambda i_\nu) J_{\mu\nu} = (i_1, \ldots i_{\mu-1}, i_\lambda, i_{\mu+1}, \ldots i_{2l}).$$

Im speziellen wird für $\lambda, \mu = 1, \ldots 2l$

$$\sum_1^{2l} {}_\nu (i_\lambda i_\nu) J_{\mu\nu} = \sum_1^{2l} {}_\nu (i_\nu i_\lambda) J_{\nu\mu} = E_{\lambda\mu} J,$$

wo $E_{\lambda\mu} = 1$ für $\lambda = \mu$, $E_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$ ist.

In unseren Betrachtungen stoßen wir auf Systeme von $(n+1)$-Gleichungen von der Form:

$$32) \quad \begin{cases} \text{a)} \ \sum_1^n {}_\nu \alpha_{o\nu} \xi_\nu = W \\ \text{b)} \ \sum_1^n {}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = K_\mu \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n$$

in denen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, W$ Unbekannte sind. Es können nunmehr zunächst sämtliche Gleichungen unabhängig sein. Dann muß notwendig n eine gerade Zahl und somit $(1, \ldots n) (1, 2-2m) \neq 0$ sein. Hier sind $\xi_1, \ldots \xi_n$ aus 32 b) und sodann W durch Substitution der Werte von $\xi_1, \ldots \xi_n$ in 32 a) zu bestimmen. — Es kann aber auch die Möglichkeit eintreten, daß die Gleichungen 32) untereinander in gewisser Abhängigkeit stehen. Erweitern wir unser System 32), indem wir der Reihe nach zu den einzelnen Gleichungen $\alpha_{00} \xi_0$, $\alpha_{01} \xi_1, \ldots \alpha_{0n} \xi_n$ addieren, so geht 32) über in:

$$33) \quad \begin{cases} \text{a)} \ \sum_0^n{}' \alpha_{0\nu}\, \xi_\nu = W \\ \text{b)} \ \sum_0^n{}' \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = K_\mu \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n .$$

In diesem System können wir ohne weiteres zur Auflösung das Jacobische Symbol benutzen. W verschwindet in diesem Falle, oder es gehorcht bestimmten Relationen, welche sich aus der Abhängigkeit der Gleichungen ergeben.

Wir können voraussetzen, wenn wir die Entstehung der Systeme der Form 33) bedenken, daß nicht alle Ausdrücke $(0\,1), \ldots (0\,n)$ verschwinden. Es läßt sich dann leicht der Satz beweisen:

I. Wenn alle Ausdrücke

$$(0, \mu_1, \ldots \mu_{2l-1})$$

verschwinden, so verschwinden auch alle Ausdrücke von der Form:

$$(\mu_1, \ldots \mu_{2l}),$$

unter den μ Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ verstanden.

In der Tat, es ist:

$$(\mu_\lambda, 0, \mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0 ,$$

welche unter den Zahlen $1, \ldots 2l$ auch μ_λ sein mag, da dann der Ausdruck links zwei gleiche Zahlen enthält. Entwickelt man die linke Seite nach der Rekursionsformel, so ergibt sich:

$$(\mu_\lambda, 0)\,(\mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0 ,$$

da alle übrigen Glieder unter der gemachten Voraussetzung Null sind. Somit ist der Ausdruck $(\mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0$, sobald auch nur eine der Größen $(0\,\mu_1), \ldots (0\,\mu_{2l})$ von Null verschieden ist.

Verschwinden hingegen alle Ausdrücke $(0\,\mu_1), \ldots (0\,\mu_{2l})$, so muß $2l < n$ sein. Ferner ist dann, wie die Entwicklung zeigt:

$$(\mu_1, 0, \mu_2, \ldots \mu_{2l}, \mu_{2l+\varkappa}) = 0 ,$$

also auch:

$$(\mu_{2l+\varkappa}, 0, \mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0 .$$

Dieses Jacobische Symbol, nach der Rekursionsformel entwickelt, ergibt:

$$(\mu_{2l+\varkappa}, 0)\,(\mu_1 \ldots \mu_{2l}) = 0 ,$$

während alle anderen Glieder gemäß der Voraussetzung verschwinden. Da aber nicht alle Ausdrücke $(\mu_{2l+\varkappa}, 0)$ verschwinden, falls $(\mu_1\,0), \ldots (\mu_{2l}\,0)$ sämtlich Null sind, so muß $(\mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0$ sein.

Ferner folgt:

II. Es gibt stets eine ganze Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß alle Ausdrücke:

$$(0\,\mu, \ldots \mu_{2m+1})$$

verschwinden, nicht aber alle Ausdrücke:

$$(0\,\mu_1, \ldots, \mu_{2m-1}),$$

unter den μ Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ verstanden, und zwar ist hierbei:

$$m \geqq 1, \qquad m \leqq \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Dies ist in der Tat der Fall. Die n Ausdrücke $(0\,\mu_\lambda)$ verschwinden nämlich nicht alle. Ist aber $2l \geqq (n+1)$, so verschwinden alle Ausdrücke $(0\,\mu_1, \ldots \mu_{2l+1})$, da dann in diesen Jacobischen Symbolen mindestens zwei gleiche Zahlen vorkommen. Wenn endlich für irgend ein l alle Ausdrücke $(0, \mu_1 \ldots \mu_{2l-1})$ verschwinden, so sind nach I alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2l}) = 0$ und demnach auch alle Ausdrücke $(0, \mu_1 \ldots \mu_{2l}\mu_{2l+1}) \equiv 0$.

Hat man diese Zahl m bestimmt, so ist man sicher, daß nicht alle Ausdrücke $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$ verschwinden, unter $\mu_1, \ldots \mu_{2m-1}$ Zahlen von $1, \ldots n$ verstanden, während noch die Möglichkeit besteht, daß alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ verschwinden.

Verschwinden hingegen nicht alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$, so können wir voraussetzen, daß $(1, 2, \ldots 2m) \neq 0$ ist, weil ja die Numerierung der Veränderlichen ganz beliebig ist. Dann sind sicher nicht alle Ausdrücke $(0, 1), \ldots (0, 2m)$ Null, denn es ist:

$$(0,\ 2m + \varkappa,\ 1, \ldots 2m) = 0.$$

Entwickeln wir diesen Ausdruck nach der Rekursionsformel, so ergibt sich, wenn $(0, 1), \ldots (0, 2m)$ alle Null sind:

$$(0,\ 2m + \varkappa)\,(1, \ldots 2m) = 0.$$

Hieraus folgt aber, daß alle Ausdrücke $(0, 2m+1)$, $(0, 2m+2)$, $\ldots$ $(0, n)$, verschwinden müssen, da nach Voraussetzung $(1, 2, \ldots 2m) \neq 0$ ist. Es müßten somit alle Ausdrücke $(0, \mu)$ verschwinden für $\mu = 1, \ldots n$. Man kann daher annehmen, daß mindestens ein Ausdruck $(0, 1), \ldots (0, 2m)$ von Null verschieden ist. Nunmehr folgt sofort, daß nicht alle Ausdrücke $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$ verschwinden können, wo $\mu_1, \ldots \mu_{2m-1}$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, \ldots 2m$ bedeuten. Sonst wäre nämlich $(\mu, 0, 1, \ldots 2m) = 0$ für $\mu = 1, \ldots 2m$ und es würde folgen: $(\mu, 0)\,(1, \ldots 2m) = 0$ für $\mu = 1, \ldots 2m$, was unmöglich ist. — Ohne die Allgemeinheit zu verletzen, können wir daher annehmen, daß

$$(0, 1, \ldots 2m - 1) \neq 0$$

ist.

Neben $(1, 2, \ldots 2m)$ ist somit auch $(0, 1, \ldots 2m - 1)$ von Null verschieden. Sind hingegen alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ gleich Null, wo $\mu_1, \ldots \mu_{2m}$ Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ bedeuten,

so kann man, falls mindestens ein Ausdruck $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1}) \neq 0$ ist, annehmen, daß $(0, 1, \ldots 2m-1) \neq 0$ ist.

Wir wollen somit unsere Bedingungsgleichungen auf folgende Fälle hin untersuchen:

I. Alle Gleichungen sind unabhängig. Dann können wir annehmen: $(1, 2, \ldots 2m) \neq 0$ und es muß sein: $n = 2m$.

II. Es sind Gleichungen abhängig. Dann können wir annehmen, daß $(0, 1, \ldots 2m-1) \neq 0$ ist, daß jedoch alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m}) \equiv 0$, ebenso wie alle Ausdrücke

$$(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m+1}) \equiv 0$$ sind.

III. Unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen von einander abhängig sind, können wir annehmen, daß neben einem Ausdruck von der Form: $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$, z. B. $(0, 1, \ldots 2m-1)$ auch mindestens ein Ausdruck von der Form $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$, z. B. $(1, 2, \ldots 2m)$ von Null verschieden ist. In letzteren zwei Fällen können wir, indem wir $W = 0$ setzen oder W bestimmten Relationen, welche sich aus der Abhängigkeit der Gleichungen ergeben, gehorchen lassen, noch Unterfälle betrachten.

Zweiter Abschnitt.

Erster Teil: Infinitesimale Transformationen, die A invariant lassen.

§ 4.

Wir behandeln zunächst den Fall, wo die § 3 definierte Zahl m der Bedingung $2m = n$ genügt. Dann ist also:

34) $$(1, 2, \ldots n) \equiv (1, 2, \ldots 2m)$$

und wir setzen:

$$(1, 2, \ldots 2m) \equiv A.$$

Wir können nach § 3 A die Form:

$$A = \sum_1^{2m}{}_\nu (\mu\,\nu)\, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}_\nu \alpha_{\mu\nu}\, A_{\mu\nu}$$

geben, wo:

$$A_{\mu\mu} = 0, \qquad A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 0$$

ist und wo gilt:

35) $$\sum_1^{2m}{}_\nu \alpha_{\lambda\nu}\, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}_\nu \alpha_{\nu\lambda}\, A_{\nu\mu} = E_{\lambda\mu}\, A$$

$\nu, \mu = 1, \ldots 2m$, $E_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$, $E_{\lambda\mu} = 1$ für $\lambda = \mu$.

Als Bedingungsgleichungen für die Invarianz von Δ bei der infinitesimalen Transformation $X(f)$ fanden wir § 2 I):

$$36) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{o\nu} \, \xi_\nu = - \, U \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{\mu\nu} \, \xi_\nu = \dfrac{\partial \, U}{\partial \, x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

36) läßt sich mit Hilfe von 35) sofort auflösen. Setzen wir die linken Seiten von 36 b) gleich $G_1, \ldots G_n$ und bilden wir:

$$37) \quad \begin{cases} \sum_1^{2m}{}_\mu \, G_\mu \, A_{\mu\lambda} = \sum_1^{2m}{}_{\mu,\nu} \, A_{\mu\lambda} \, \alpha_{\mu\nu} \, \xi_\nu \\ \qquad\qquad = \sum_1^{2m}{}_\nu \, E_{\lambda\nu} \, A \, \xi_\nu, \end{cases}$$

so ergibt sich durch Substitution der Werte der rechten Seite:

$$38) \qquad \sum_1^{2m}{}_\mu \, G_\mu \, A_{\mu\lambda} = \sum_1^{2m}{}_\mu \, A_{\mu\lambda} \, \frac{\partial \, U}{\partial \, x_\mu} .$$

Aus 37) und 38) folgt sofort:

$$A \, \xi_\nu = \sum_1^{2m}{}_\mu \, A_{\mu\nu} \, \frac{\partial \, U}{\partial \, x_\mu} .$$

Die Werte der ξ in 36 a) substituiert ergibt:

$$39) \qquad \sum_1^{2m}{}_\nu \, \alpha_{o\nu} \sum_1^{2m}{}_\mu \, A_{\mu\nu} \, \frac{\partial \, U}{\partial \, x_\mu} + A \, U = 0 .$$

Setzt man noch:

$$40) \qquad \sum_1^{2m}{}_\nu \, \alpha_{o\nu} \, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}_\nu \, \alpha_{\nu\, o} A_{\nu\mu} = B_{\mu o},$$

auf welche Relation wir später noch stoßen werden, so ergibt sich für 39):

$$41) \qquad \sum_1^{2m}{}_\mu \, B_{\mu o} \, \frac{\partial \, U}{\partial \, x_\mu} + A \, U = 0 .$$

Integriert man 41), indem man annimmt, daß U als Funktion von $x_1, \ldots x_n$ durch die Gleichung $f = 0$ definiert werde, so ist f zu bestimmen aus:

$$42) \qquad \sum_1^{2m}{}_\mu \, B_{\mu o} \, \frac{\partial \, f}{\partial \, x_\mu} - A \, U \, \frac{\partial \, f}{\partial \, U} = 0 .$$

Hat man f hieraus als eine Funktion der n Lösungen der par-

tiellen Differentialgleichung 42) bestimmt, so liefert $\bar{f} = 0$ nach U aufgelöst sodann die allgemeine Lösung $\bar{U}$ der Gleichung 41).

Ist $\bar{U}$ bestimmt, so ist die allgemeinste infinitesimale Transformation für diesen Fall:

$$X(f) = \sum_{1}^{n}{}_{\mu,\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Anmerkung: $U = 0$ ergibt, wie ersichtlich, keine Lösung außer $X(f) \equiv 0$ für jedes beliebige f.

§ 5.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, in dem die Gleichungen 25) abhängig sind, und zwar betrachten wir zunächst den § 3 definierten II. Fall, in dem eine ganze Zahl m von solcher Beschaffenheit existiert, daß $(0, 1, \ldots 2m-1) \neq 0$ ist, während alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ verschwinden, unter $\mu_1, \ldots \mu_{2m}$ Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ verstanden.

Diesen Fall können wir noch in a) und b) gliedern, indem wir unter a) annehmen, daß die charakteristische Funktion verschwindet, welche Voraussetzung wir unter b) fallen lassen.

a) Unsere Bedingungsgleichungen 25) werden hier:

$$43) \quad \begin{cases} \text{a)} \ \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_{o\nu} \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} \ \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = 0 \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Statt 43) betrachten wir besser das System:

$$44) \quad \begin{cases} \text{a)} \ G_o \equiv \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \alpha_{o\nu} \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} \ G_\mu \equiv \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = 0 \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n,$$

dessen linke Seiten wir gleich $G_0, G_1, \ldots G_n$ gesetzt haben. 44) steht zu 43) in demselben Verhältnis wie 33) zu 32). Setzen wir:

$$A \equiv (0, 1, 2m-1) \neq 0,$$

so können wir A die Form geben:

$$A = \sum_{0}^{2m-1}{}_{\nu} \alpha_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \qquad \mu = 0, 1, \ldots 2m-1.$$

Dann wird für beliebiges $\lambda = 0, 1, \ldots n$:

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\nu} = \sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{\nu\lambda} A_{\nu\mu}$$

$$= (0, 1, \ldots \mu - 1, \lambda, \mu + 1, \ldots 2m - 1)$$

oder im speziellen wird:

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\nu} = \sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{\nu\lambda} A_{\nu\mu} = E_{\lambda\mu} A$$

$$\lambda, \mu = 0, \ldots 2m - 1$$

und:

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{2m-1+j,\nu} A_{\mu\nu} = \sum_0^{2m-1}{}^{\nu} \alpha_{\nu, 2m-1+j} A_{\nu\mu} = B_{\mu j}$$

$$j = 1, \ldots n - 2m + 1$$

$$\mu = 0, 1, \ldots . 2m - 1,$$

wo wir also:

$$(0, 1, \ldots \mu - 1, 2m - 1 + j, \mu + 1, \ldots 2m - 1) = B\mu j$$

gesetzt haben. Entwickeln wir jetzt für $\lambda = 0, 1, \ldots n$:

$$(\lambda, 2m - 1 + j, 0, 1, \ldots 2m - 1) = 0,$$

so ergibt sich:

$$(\lambda, 2m - 1 + j)(0, 1, \ldots 2m - 1)$$

$$+ \sum_0^{2m-1}{}^{\mu} (\lambda, \mu)(\mu + 1, \ldots 2m - 1, 2m - 1 + j, 0, \ldots \mu - 1).$$

Durch $(2m - 1 - \mu)$-fache zyklische Vertauschung folgt hieraus

$$(\mu + 1, \ldots 2m - 1, 2m - 1 + j, 0, 1, \ldots \mu - 1) =$$

$$(-1)^{2m-1-\mu}(2m - 1 + j, 0, 1, \ldots \mu - 1, \mu + 1, \ldots 2m - 1)$$

und da man $2m - 1 + j$ der Reihe nach mit $0, 1, \ldots \mu - 1$ vertauschen kann:

$$(2m - 1 + j, 0, 1, \ldots \mu - 1, \mu + 1, \ldots 2m - 1) = (-1)^{\mu} B_{\mu j}.$$

Somit haben wir:

45) $$\sum_0^{2m-1}{}^{\mu} \alpha_{\lambda,\mu} B_{\mu j} = \alpha_{\lambda, 2m-1+j} A$$

$$\lambda = 0, 1, \ldots n$$

$$j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

Da nach Voraussetzung:

$$B_{o,j} = (2m - 1 + j, 1, \ldots 2m - 1) = 0$$

ist, so folgt für 45):

46) $$\sum_1^{2m-1}{}^{\mu} \alpha_{\lambda\mu} B_{\mu j} = \alpha_{\lambda, 2m-1+j} A.$$

Bilden wir nunmehr:

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\mu} B_{\mu j} G_\mu = \sum_0^{n}{}^{\nu} \sum_0^{2m-1}{}^{\mu} B_{\mu j} \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1,$$

so folgt hieraus nach 46):

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\mu} B_{\mu j} G_\mu = - A \sum_0^{n}{}^{\nu} \alpha_{\nu,\, 2m-1+j}\, A,$$

d. h. nach den Definitionsgleichungen von G:

$$A\, G_{2m-1+j} = \sum_0^{2m-1}{}^{\mu} B_{\mu j}\, G_\mu \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

47) $$A\, G_{2m-1+j} = \sum_1^{2m-1}{}^{\mu} B_{\mu j}\, G_\mu$$

Somit folgen die Gleichungen $G_{2m} = 0, \ldots G_n = 0$ aus $G_1 = 0, \ldots G_{2m-1} = 0$.

Nunmehr lösen wir die $2m$ ersten Gleichungen nach ξ_0, $\xi_1, \ldots \xi_{2m-1}$ auf. Bilden wir für $\lambda = 0, 1, \ldots 2m - 1$:

$$\sum_0^{2m-1}{}^{\mu} A_{\mu\lambda}\, G_\mu = \sum_0^{2m-1}{}^{\mu} E_{\lambda\mu}\, A\, \xi_\mu + \sum_1^{n-2m+1}{}^{j} B_{\lambda j}\, \xi_{2m-1+j} = 0,$$

so ergibt sich hieraus sofort:

48) $$A\, \xi_\mu + \sum_0^{n-2m+1}{}^{\mu} B_{\mu j}\, \xi_{2m-1+j} = 0.$$

Im speziellen ergibt sich für ξ_0, da sämtliche $B_{0j} = 0$ sind:

$$\xi_0 = 0.$$

Es ist somit gleichgültig, ob wir unser System 43) oder 44) betrachten. Beide fallen wegen $\xi_0 = 0$ zusammen. — Durch die für $\xi_1, \ldots \xi_{2m-1}$ gefundenen Werte werden, wie gezeigt, alle Gleichungen 43) befriedigt. Setzen wir daher:

49) $$X_j(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{2m-1+j}} - \sum_1^{2m-1}{}^{\mu} \frac{B_{\mu j}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1,$$

so sind alle infinitesimalen Transformationen, die verschwindende charakteristische Funktion haben, und welche den Pfaffschen Ausdruck A — bei dem das durch § 3 definierte Jacobische Symbol $(0, 1, \ldots 2m - 1)$ verschieden von Null ist, bei dem jedoch alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ verschwinden — absolut invariant lassen, in der Form enthalten:

$$X(f) = \sum_1^{n-2m+1}{}^{j} \xi_{2m-1+j} X_j(f).$$

Da mit $X_j(f)$ und $X_\varkappa(f)$, $\varkappa, j = 1, \ldots n - 2m + 1$, auch $(X_\varkappa X_j)$ Δ absolut invariant läßt und da, wie aus § 1 Satz III folgt, die charakteristische Funktion von $(X_\varkappa X_j)$ Null wird, so muß auch $(X_\varkappa X_j)$ der durch 49) definierten Schar von infinitesimalen Transformationen angehören. Es muß zugleich:

$$(X_j X_\varkappa) \equiv 0$$

sein, da hier die Differentialquotienten $\partial f / \partial x_{2m}, \ldots \partial f / \partial x_n$ fehlen.

b) Unter der Voraussetzung, daß wir denselben Ausdruck Δ wie unter a) haben, wollen wir annehmen, daß die zu $X(f)$ gehörige charakteristische Funktion von Null verschieden ist. Die Bedingungsgleichungen sind somit:

$$50) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}^\nu \alpha_{o\nu} \eta_\nu \equiv - V \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}^\nu \alpha_{\mu\nu} \eta_\nu = \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, 2, \ldots n.$$

Ist $X_j(f)$ eine infinitesimale Transformation von der Art des ersten Teiles unseres Paragraphen, also eine solche, welche den vorliegenden Pfaffschen Ausdruck Δ absolut invariant läßt und eine verschwindende charakteristische Funktion hat und ist $Y(f)$ eine infinitesimale Transformation, welche dasselbe leistet, aber mit der nicht verschwindenden charakteristischen Funktion V, so besteht nach § 1 Satz IV die Identität:

$$X_j(V) + Y(U) \equiv 0.$$

Hieraus folgt, da $U = 0$:

$$51) \qquad X_j(V) \equiv 0 \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

V kann somit nur dann charakteristische Funktion einer solchen infinitesimalen Transformation sein, wenn es diesen Differentialgleichungen 51) genügt. 51) ausgeführt ergibt:

$$X_j(V) = \frac{\partial V}{\partial x_{2m-1+j}} - \sum_1^{2m-1}{}^\mu \frac{B_{\mu j}}{A} \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \quad j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

Hierbei ist ebenfalls $A \equiv (0, 1, \ldots 2m - 1) \neq 0$. Diese Differentialgleichungen, welche, wie oben gezeigt, ein $(n - 2m + 1)$-gliedriges vollständiges System bilden, sind aber nicht die einzigen Differentialgleichungen für V. Setzen wir nämlich die linken Seiten von 50) gleich $H_0, H_1, \ldots H_n$, so folgen auch hier die Relationen:

$$52) \qquad A H_{2m-1+j} = \sum_1^{2m-1}{}^\mu B_{\mu j} H_\mu.$$

Die rechten Seiten eingesetzt ergibt:

$$A \frac{\partial V}{\partial x_{2m-1+j}} - \sum_1^{2m-1}{}_\mu B_{\mu j} \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

Hiermit ist nur gezeigt, daß die Gleichungen $H_2 = \partial V/\partial x_{2m}, \ldots H_n = \partial V/\partial x_n$ aus $H_1 = \partial V/\partial x_1, \ldots H_{2m-1} = \partial V/\partial x_{2m-1}$ folgen und V diesen Relationen 51) gehorchen muß. Jedoch auch $H_1 = \partial V/\partial x_1, \ldots H_{2m-1} = \partial V/\partial x_{2m-1}$ sind nicht unabhängig untereinander. Nehmen wir an, was wir können, daß $A' \quad (1, 2, \ldots 2m-2) \neq 0$ ist, während fortgesetzt alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m}) \quad 0$ sind, so ergibt sich sofort zwischen $H_1, \ldots H_{2m-1}$ die Relation:

$$53) \qquad A' H_{2m-1} = \sum_1^{2m-2}{}_\mu B'_{\mu, 2m-1} H_\mu,$$

wo: $B'_{\mu, 2m-1} \equiv (1, 2, \ldots \mu - 1, 2m - 1, \mu + 1, \ldots 2m - 2)$ ist.

In 53) die Werte der rechten Seiten eingesetzt ergibt:

$$54) \qquad A' \frac{\partial V}{\partial x_{2m-1}} - \sum_1^{2m-2}{}_\mu B'_{\mu\, 2m-1} \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0.$$

Unsere charakteristische Funktion V muß somit nicht nur 51), sondern auch 54) gehorchen. 51) und 54) zusammen bilden aber ein $(n - 2m + 2)$-gliedriges vollständiges System, wie wir sogleich zeigen wollen.

§ 6.

Wir wollen, um nachzuweisen, daß 51) und 54) ein vollständiges System bilden, untersuchen, welche infinitesimalen Transformationen den Pfaffschen Ausdruck Δ des letzten Paragraphen absolut invariant lassen, falls der charakteristischen Funktion der konstante Wert 1 beigelegt wird. Die Bedingungsgleichungen für diesen Fall sind:

$$55) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{o\nu} \xi_\nu = 1, \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = 0. \end{cases}$$

Auch hier ist:

$$A \equiv (0, 1, \ldots 2m - 1) \neq 0$$

und es sei wieder:

$$A' \equiv (1, 2, \ldots 2m - 2) \neq 0.$$

Wir betrachten besser das System:

56)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_0^n{}_\nu \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 1, \\ \text{b)} \quad \sum_0^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = 0. \end{cases}$$

Setzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen 56) gleich $G_0, G_1, \ldots G_n$, so ergibt sich auch hier das Bestehen der Relationen:

$$A\, G_{2m-1+j} = \sum_0^{2m-1}{}_\mu B_{\mu j}\, G_\mu$$
$$A\, G_{2m-1+j} = \sum_1^{2m-1}{}_\mu B_{\mu j}\, G_\mu \qquad j = 1, \ldots n - 2m + 1.$$

Somit folgen die Gleichungen $G_{2m} = 0, \ldots G_n = 0$ aus $G_1 = 0, \ldots G_{2m-1} = 0$. Wir können $\xi_{2m} = 0, \ldots \xi_n = 0$ setzen und erhalten zur Bestimmung von $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{2m-1}$ aus 55) die Gleichungen:

57)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_0^{2m-1}{}_\nu \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 1 \\ \text{b)} \quad \sum_0^{2m-1}{}_\nu \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = 0 \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots 2m - 1.$$

Wir bilden für $\lambda = 0, 1, \ldots 2m - 1$

$$\sum_0^{2m-1}{}_\mu A_{\mu\lambda}\, G_\mu = \sum_0^{2m-1}{}_\mu E_{\lambda\mu}\, A\, \xi_\nu = A_{o\lambda}.$$

So ergibt sich sofort:

58) $$A\, \xi_\nu = A_{o\nu} \qquad \nu = 0, 1, \ldots 2m - 1.$$

Es wird aber:

$$\xi_0 = 0, \quad \text{da} \quad A_{00} = 0$$

ist. System 55) fällt daher mit System 56) vollständig zusammen. Ferner ist:

59) $$A\, \xi_\nu = A_{o\nu},$$

wo aber:

60) $$A_{01} = (2, 3, \ldots 2m - 1).$$

Wir setzten nach 53):

$$B'_{1, 2m-1} = (2m - 1, 2, \ldots 2m - 2).$$

Da durch einmalige zyklische Vertauschung $B'_{1, 2m-1}$ das Zeichen ändert, so ist:

61) $$- B'_{1, 2m-1} = (2, \ldots 2m - 1).$$

60) mit 61) verglichen zeigt, daß

$$A_{01} = - B'_{1, 2m-1}$$

ist. Ebenso ergibt sich:

$$A_{0\nu} = - B'_{\nu, 2m-1} \qquad \nu = 1, \ldots 2m-2.$$

Somit haben wir für 59):

$$A\,\xi_\nu = - B'_{\nu, 2m-1} \qquad \nu = 1, \ldots 2m-2.$$

Für ξ_{2m-1} ergibt sich aus 58):

$$A\,\xi_{2m-1} = A_{0, 2m-1}$$

$$A\,\xi_{2m-1} = A',$$

da $A_{0, 2m-1} = A'$ ist.

Der Pfaffsche Ausdruck Δ bleibt somit bei der infinitesimalen Transformation:

$$L(f) \equiv \frac{A'}{A} \frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}} - \sum_1^{2m-2\mu} \frac{B'_{\mu j}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$$

absolut invariant und die zu $L(f)$ gehörige charakteristische Funktion hat den Wert 1.

Die infinitesimalen Transformationen $L(f), X_j(f), j = 1, \ldots n - 2m + 1$ bilden aber ein vollständiges System. Bilden wir nämlich für $f = \Delta$ den Klammerausdruck:

$$L\big(X_j(f)\big) - X_j\big(L(f)\big),$$

so ergibt sich dieser gleich Null. Die zu Δ gehörige charakteristische Funktion hat nach § 1 Satz III ebenfalls den Wert Null. $(X_j\, L)$ läßt so Δ absolut invariant und die zu Δ gehörige charakteristische Funktion hat den Wert Null. $(X_j\, L)$ muß somit die Form: $\sum_1^{n-2m} {}_j\, \xi_{2m-1+j}\, X_j(f)$ haben.

$X_j(f) = 0,\ j = 1, \ldots n - 2m + 1,\ L(f) = 0$ sind aber identisch mit den Relationen 51) und 54). 51) und 54) bilden daher ebenfalls ein vollständiges System.

§ 5. Fortsetzung.

Die Differentialgleichungen 51), 54) bilden, wie soeben gezeigt wurde, ein $(n - 2m + 2)$-gliedriges vollständiges System. Dasselbe hat demzufolge $(2m - 2)$ unabhängige Lösungen. Ist V eine Funktion der Lösungen dieses Systems, so können wir leicht alle infinitesimalen Transformationen $Y(f)$ für diesen Fall geben. Setzen wir:

$$Z(f) = Y(f) - \sum_1^{n-2m+1} {}_j\, \eta_{2m-1+j}\, X_j(f)$$

$$= \sum_1^n {}_\mu\, \zeta_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu},$$

so sind $\zeta_{2m}, \ldots \zeta_n$ sämtlich Null. $Z(f)$ läßt ebenfalls Δ invariant und die zugehörige charakteristische Funktion hat wieder den Wert V. Jetzt haben wir bloß $\zeta_1, \ldots \zeta_{2m-1}$ zu bestimmen aus:

$$62) \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^{2m-1\nu} \alpha_{o\nu}\zeta_\nu = -\bar{V} \\ \text{b)} \quad \sum_1^{2m-1\nu} \alpha_{\mu\nu}\zeta_\nu = \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots 2m-1.$$

Setzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen gleich F_0, $F_1, \ldots F_{2m-1}$ und bilden wir:

$$\sum_0^{2m-1\mu} F_\mu A_{\mu\lambda} = \sum_1^{2m-1\nu} \sum_0^{2m-1\mu} A_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\nu}\zeta_\nu$$

$$63) \qquad = \sum_1^{2m-1\nu} E_{\lambda\nu} A,$$

so ergibt sich durch Bildung dieser Summe für die rechten Seiten:

$$64) \qquad \sum_0^{2m-1\mu} F_\mu A_{\mu\lambda} = -\bar{V} A_{o\lambda} + \sum_1^{2m-1\mu} A_{\mu\lambda} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu}.$$

Somit wird:

$$\zeta_\nu A = -\bar{V} A_{o\nu} + \sum_1^{2m-1\mu} A_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu} \qquad \nu = 1, \ldots 2m-1$$

und es ergibt sich:

$$65) \qquad Z(f) = \sum_{\mu,\nu}^{1,\ldots 2m-1} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} - \bar{V} \sum_1^{2m-1\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation ist in diesem Fall:

$$X(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m+1j} \eta_{2m-1+j} X_j(f).$$

§ 7.

Wir kommen jetzt zu dem unter § 3 definierten III. Fall, in dem eine ganze Zahl m von der Beschaffenheit existiert, daß neben mindestens einem Ausdruck $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$ auch mindestens ein Ausdruck $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ von Null verschieden ist. Ohne die Allgemeinheit zu verletzen, können wir, wie gezeigt wurde, annehmen, daß neben $(0, 1, \ldots 2m-1)$ auch $(1, 2, \ldots 2m)$ von Null verschieden ist. Hingegen verschwinden alle Ausdrücke $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m+1})$, $(\mu_1, \ldots \mu_{2m+2})$, unter $\mu_1, \ldots \mu_{2m+2}$ Zahlen der Reihe $1, \ldots n$ verstanden. Auch diesen Fall können wir noch in a) und b) gliedern, indem wir unter a) annehmen, daß

die charakteristische Funktion $U = 0$ ist, während unter b) die charakteristische Funktion bestimmten Relationen gehorchen muß.

a) Wir nehmen an, wie wir es können, ohne die Allgemeinheit zu verletzen, daß:

$$(0, 1, \ldots 2m-1) \neq 0, \quad (1, 2, \ldots 2m) \neq 0$$

ist. Es sind unter dieser Annahme $\xi_1, \ldots \xi_n$ zu bestimmen aus:

$$66) \quad \begin{cases} \text{a)} & \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} & \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = 0. \end{cases}$$

Statt dessen betrachten wir auch hier, wie in § 5 a), das System:

$$67) \quad \begin{cases} \text{a)} & \sum_0^n{}^{\nu} \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} & \sum_0^n{}^{\nu} \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = 0. \end{cases}$$

Wir beweisen zunächst, daß aus den $2m$ ersten Gleichungen 67 b) die $n - 2m$ letzten sowohl als auch 67 a) folgen.

Setzen wir:

$$A \equiv (1, 2, \ldots 2m) \neq 0,$$

so können wir A die Form geben:

$$A = \sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\mu\nu}\, A_{\mu\nu}.$$

Für ein beliebiges $\lambda = 0, 1, \ldots n$ wird:

$$\sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\lambda\nu}\, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\nu\lambda}\, A_{\nu\mu} \qquad \lambda = 1, \ldots n$$

$$\sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{o\nu}\, A_{\mu\nu} = (1, 2, \ldots \mu - 1, 0, \mu + 1, \ldots 2m).$$

Im besonderen wird:

$$\sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\lambda\nu}\, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\nu\lambda}\, A_{\nu\mu} = E_{\lambda\mu} A \qquad \lambda, \mu = 1, \ldots n$$

und:

$$\sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{2m+j,\nu}\, A_{\mu\nu} = \sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{\nu,\,2m+j}\, A_{\nu\mu} = B_{\mu j}$$

$$j = 1, \ldots n - 2m, \quad \mu = 1, \ldots 2m$$

$$\sum_1^{2m}{}^{\nu} \alpha_{o\nu}\, A_{\mu\nu} = B_{\mu o},$$

wo wir also:

$$(1, 2, \ldots \mu - 1, 2m + j, \mu + 1, \ldots 2m) = B_{\mu j}$$
$$\mu = 1, \ldots 2m, \; j = 1, \ldots n - 2m$$
$$(1, 2, \ldots \mu - 1, 0, \mu + 1, \ldots 2m) = B_{\mu o}$$

gesetzt haben.

Nach Voraussetzung ist:

$$(\lambda, 2m + j, 1, 2, \ldots 2m) = 0,$$

welcher Ausdruck nach der Rekursionsformel entwickelt ergibt:

$$0 = (\lambda, 2m + j)(1, \ldots 2m) + \sum_1^{2m}{}^{\mu} (\lambda, \mu)(\mu + 1, \ldots 2m, 2m + j, 1, \ldots \mu - 1).$$

Nun ist, wie wir schon sahen:

$$(\mu + 1, \ldots 2m, 2m + j, 1, \ldots \mu - 1)$$
$$(-1)^{2m-\mu} (2m + j, 1, \ldots \mu - 1, \mu + 1, \ldots 2m).$$

Da das Jacobische Symbol das Zeichen wechselt, wenn man in demselben zwei Zahlen vertauscht, so ergibt sich:

$$(2m + j, 1, \ldots \mu - 1, \mu + 1, \ldots 2m) = (-1)^{\mu - 1} B_{\mu j}.$$

Wir erhalten daher:

68)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \alpha_{\lambda, 2m+j} A = \sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\lambda \mu} B_{\mu j} \\ \text{b)} \quad \alpha_{2m+j, \lambda} A = - \sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\lambda \mu} B_{\mu j}. \end{cases}$$

Entsprechend ergibt sich aus der Entwicklung:

$$(\lambda, 0, 1, \ldots 2m) = 0$$

die Formel:

69) $$\alpha_{\lambda o} A - \sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\lambda \mu} B_{\mu o} = 0 \qquad \lambda = 1, \ldots n.$$

Setzen wir für 67):

$$G_\sigma - \sum_0^n{}^{\nu} \alpha_{o \nu} \xi_\nu \qquad \sigma = 0, 1, \ldots n,$$

so wird:

$$\sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu j} G_\mu \quad \sum_1^{2m}{}^{\mu} \sum_0^n{}^{\nu} \alpha_{\mu \nu} B_{\mu j} \xi_\nu,$$

woraus folgt:

$$= \sum_0^n{}^{\nu} \alpha_{2m+j, \nu} \xi_\nu A,$$

d. h. nach der Definition der G:

70 a) $$A \, G_{2m+j} = \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu j} G_\mu \qquad j = 1, \ldots n - 2m.$$

Ferner wird:

$$\sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu o} G_\mu = \sum_0^{n}{}^{\nu} \sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\mu\nu} B_{\mu o} \xi_\nu$$

$$= - \sum_0^{n}{}^{\nu} \alpha_{\nu o} \xi_\nu A,$$

d. g.:

70 b) $$A G_0 = \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu o} G_\mu.$$

Hiermit ist aber gezeigt, daß $G_0 = 0$, $G_{2m+1} = 0, \ldots G_n = 0$ aus $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots G_{2m} = 0$ folgen.

Nunmehr lösen wir die $2m$ ersten Gleichungen 67 b) nach $\xi_1, \ldots \xi_{2m}$ auf. Ist $A = (1, 2, \ldots 2m) \neq 0$, so ergibt 67 b) mit $A_{\mu\lambda}$ multipliziert und von 1 bis $2m$ summiert:

$$\sum_1^{2m}{}^{\mu} G_\mu A_{\mu\lambda} = \sum_0^{n}{}^{\nu} \sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\mu\nu} A_{\mu\lambda} \xi_\nu$$

$$= \sum_1^{2m}{}^{\nu} E_{\lambda\nu} A \xi_\nu + \sum_1^{n-2m}{}^{j} B_{\lambda j} \xi_{2m+j} + B_{\lambda o} \xi_0.$$

Hieraus folgt, da dieser Ausdruck gleich Null ist:

$$A \xi_\nu + \sum_1^{n-2m}{}^{j} B_{\nu j} \xi_{2m+j} + B_{\lambda o} \xi_0 = 0,$$

oder wenn wir, wie wir können, ξ_0 den Wert Null erteilen:

71) $$A \xi_\nu + \sum_1^{n-2m}{}^{j} B_{\nu j} \xi_{2m+j} = 0.$$

Hierdurch haben wir sofort statt der Auflösungen des Systems 67) jene des Systems 66), welches wir eigentlich untersuchen. Durch die für $\xi_1 \ldots \xi_{2m}$ gefundenen Werte werden nach dem vorausgehenden alle Gleichungen 66) befriedigt. Setzen wir daher:

72) $$X_j(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}^{\mu} \frac{B_{\mu j}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad j = 1, \ldots n - 2m,$$

so sind alle infinitesimalen Transformationen, die verschwindende charakteristische Funktion haben, in der Form:

72′) $$X(f) = \sum_1^{n-2m}{}^{j} \xi_{2m+j} X_j(f)$$

enthalten. Da zugleich mit $X_\varkappa(f)$ und $X_j(f)$ auch $(X_\varkappa X_j)$ Δ invariant läßt, $\varkappa, j = 1, \ldots n - 2m$ und da $X_\varkappa(f)$ und $X_j(f)$ beide verschwindende charakteristische Funktion haben und somit nach Satz III des § 1 auch die charakteristische Funktion von $(X_\varkappa X_j)$

verschwindet, so muß auch $(X_\varkappa X_j)$ der durch 72') definierten Schar von infinitesimalen Transformationen angehören, da es außer $X_j(f), j = 1, \ldots n - 2m$ in unserem Falle keine weiteren infinitesimalen Transformationen mit verschwindender charakteristischer Funktion gibt. Es muß zugleich:

$$(X_j X_\varkappa) = 0$$

sein, da hier die Differentialquotienten $\partial f/\partial x_{2m}, \ldots \partial f/\partial x_n$ fehlen.

b) Lassen wir die gleichen Bedingungen wie unter a) bestehen, nehmen wir jedoch an, daß die charakteristische Funktion von Null verschieden ist, so können wir unser System Bedingungsgleichungen, falls wir V als charakteristische Funktion nehmen, in der Form geben:

73)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{o\nu}\eta_\nu = -V \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{\mu\nu}\eta_\nu = \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu}. \end{cases}$$

Ist $X_j(f)$ eine der unter a) gefundenen infinitesimalen Transformationen, also eine solche, deren charakteristische Funktion U unter sonst gleichen Bedingungen wie hier verschwindet, so folgt nach Satz IV § 1:

$$X_j(V) = 0 \qquad j = 1, \ldots n - 2m,$$

d. h.:

74)
$$\frac{\partial V}{\partial x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}_\mu \frac{B_{\mu j}}{A} \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0.$$

V kann somit nur dann charakteristische Funktion einer solchen infinitesimalen Transformation, wie wir sie bestimmen wollen, sein, wenn es diesen Differentialgleichungen 74) genügt. Diese bilden nach a) ein $(n - 2m)$-gliedriges vollständiges System und haben so $2m$-Lösungen.

Die Differentialgleichungen 74) sind aber nicht die einzigen, welche sich für V ergeben.

Wie unter a) folgt auch hier, falls wir:

$$H_\mu = \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{\mu\nu}\eta_\nu \qquad \mu = 0, 1, \ldots n$$

setzen, das Bestehen der Relationen:

70)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad A H_{2m+j} = \sum_1^{2m}{}_\mu \, B_{\mu j} H_\mu \\ \text{b)} \quad A H_0 \quad\; = \sum_1^{2m}{}_\mu \, B_{\mu o} H_\mu. \end{cases}$$

Für die H die Werte der rechten Seite 73) substituiert ergibt:

$$75) \quad \begin{cases} a) & \dfrac{\partial V}{\partial x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu j}}{A} \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \\ b) & V - \sum_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu o}}{A} \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 . \end{cases}$$

Auch diese Differentialgleichungen stellen ein unbeschränkt integrables System dar, wie wir sogleich im nächsten Paragraph zeigen werden.

§ 8.

Um den Beweis zu erbringen, daß 75) ein unbeschränkt integrables System ist, betrachten wir genau denselben Pfaffschen Ausdruck wie § 7 und fragen jetzt, wie ist die infinitesimale Transformation $X(f)$ beschaffen, wenn $X(A) = A$ ist, vorausgesetzt, daß die zu A gehörige charakteristische Funktion verschwindet. Wir haben nach 30) als Bedingungsgleichungen:

$$76) \quad \begin{cases} a) & \sum_1^n{}_\nu \alpha_{o\nu} \xi_\nu = 0 \\ & \qquad\qquad \mu = 1, \ldots n. \\ b) & \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = \alpha_{o\mu} . \end{cases}$$

Auch hier besteht $(0, 1, \ldots 2m-1) \neq 0$, $(1, 2, \ldots 2m) \neq 0$. Setzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen 76) gleich G_σ $\sigma = 0, 1, \ldots n$, so bestehen gemäß § 7 70) auch hier die Relationen:

$$70) \quad \begin{cases} a) & A\, G_{2m+j} = \sum_1^{2m}{}_\mu B_{\mu j}\, G_\mu \\ b) & A\, G_0 = \sum_1^{2m}{}_\mu B_{\mu o}\, G_\mu . \end{cases}$$

Substituieren wir die Werte der rechten Seite 76), so folgt:

$$77) \quad \begin{cases} a) & A\alpha_{0,\,2m+j} - \sum_1^{2m}{}_\mu \alpha_{o\mu} B_{\mu j} = 0 \\ b) & \sum_1^{2m}{}_\mu \alpha_{o\mu} B_{\mu o} = 0 . \end{cases}$$

Nur wenn diese Relationen bestehen, ist eine Lösung unserer Aufgabe überhaupt möglich. Diese Beziehungen gelten aber tatsächlich, denn 77 a) ist weiter nichts als 68 a) für $\lambda = 0$, ebenso wie 77 b) 69) für $\lambda = 0$ darstellt. So können wir unsere Aufgabe ruhig weiter führen. Wir lösen unsere Gleichungen 76) nach

$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2m}$ auf, während $\xi_{2m+1}, \ldots \xi_n$ beliebig bleiben. Nehmen wir sogleich zur Vereinfachung an, daß $\xi_{2m+1}, \ldots \xi_n$ Null sind, so haben wir $\xi_1, \ldots \xi_{2m}$ zu bestimmen aus:

$$78) \qquad \sum_1^{2m}{}_\mu \alpha_{\mu\nu} \xi_\nu = \alpha_{o\mu} \qquad \mu = 1, \ldots 2m.$$

Hieraus folgt sofort:

$$A \xi_\nu = \sum_1^{2m}{}_\mu A_{\mu\nu} \alpha_{o\mu},$$

so daß die verlangte infinitesimale Transformation wird:

$$79) \qquad X_0(f) = \sum_1^{2m}{}_{\mu,\nu} \alpha_{o\mu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

oder zusammengefaßt:

$$80) \qquad X_0(f) = \sum_1^{2m}{}_\mu \frac{B_{\mu o}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}.$$

Die zu $X_0(f)$ gehörige charakteristische Funktion verschwindet hierbei, während sich ergibt:

$$X_0(\Delta) \qquad \Delta.$$

Unser System 72) ist ein vollständiges System. Nehmen wir hierzu noch 80), so haben wir das System:

$$81) \quad \begin{cases} X_j(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_{2m+j}} - \displaystyle\sum_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu j}}{A} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0 \\ X_0(f) = \displaystyle\sum_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu o}}{A} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0. \end{cases} \qquad j = 1, \ldots n - 2m.$$

Auch dieses System ist unbeschränkt integrabel, denn bilden wir die bekannten Klammerausdrücke $(X_j X_0)$, für $f = 0$, so wird:

$$\begin{aligned} (X_j X_0)_{f=\Delta} &= X_j\big(X_0(\Delta)\big) - X_0\big(X_j(\Delta)\big) \\ &= X_j(\Delta) - X_0(0) = 0 \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots n - 2m.$$

Somit läßt $(X_j X_0)$ Δ ebenfalls absolut invariant und da $X_j(f)$ und $X_0(f)$ beide verschwindende charakteristische Funktion haben, so muß auch die charakteristische Funktion von $(X_j X_0)$ verschwinden. $(X_j X_0)$ ist somit eine infinitesimale Transformation von der Form 72'). Da $(X_j X_0)$ die Differentialquotienten von f nach $x_{2m+1}, \ldots x_n$ nicht enthält, so muß es verschwinden und so ist:

$$(X_j X_0) \qquad 0 \qquad j = 1, \ldots n - 2m.$$

$X_0(f), X_1(f), \ldots X_{n-2m}(f)$ bildet demnach ein $(n - 2m + 1)$-gliedriges vollständiges System.

Leicht läßt sich nunmehr zeigen, daß auch 75) ein unbeschränkt integrables System bildet. Setzen wir die linken Seiten von 75) gleich $Z_0(V), \ldots Z_{n-2m}(V)$:

$$82) \quad \begin{cases} Z_j(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x_{2m+j}} - \sum\limits_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu j}}{A} \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \\ Z_0(V) = \sum\limits_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu o}}{A} \dfrac{\partial V}{\partial x_\mu} - V = 0 \end{cases}$$

und führen wir statt der Unbekannten V die Funktion:

$$f = f(V, x_1, \ldots x_n) = 0$$

ein, so haben wir statt 82):

$$82') \quad \begin{cases} Z_j(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_{2m+j}} - \sum\limits_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu j}}{A} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} = 0 \\ Z_0(f) = \sum\limits_1^{2m}{}_\mu \dfrac{B_{\mu o}}{A} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu} - V \dfrac{\partial f}{\partial V} = 0. \end{cases}$$

Die Klammeroperation ergibt hier:

$$(Z_0 Z_j) = - Z_j(f).$$

Also ist 82') ein $(n - 2m + 1)$-gliedriges vollständiges System und daraus folgt, daß das System 82) und ebenso 75) unbeschränkt integrabel ist.

§ 7. Fortsetzung.

Haben wir $\bar{f}$ als eine Funktion der $n - 2m - 1$ Lösungen des Systems 82') gefunden und sodann durch Auflösung von $\bar{f} = 0$ nach $\bar{V}$ diese Größe bestimmt, so setzen wir nunmehr:

$$83) \quad \begin{cases} Z(f) = Y(f) - \sum\limits_n^{n-2m}{}_j \eta_{2m+j} X_j(f) \\ \qquad = \sum\limits_1^n{}_\mu \zeta_\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_\mu}. \end{cases}$$

Hier sind $\zeta_{2m+1}, \ldots \zeta_n$ Null. $Z(f)$ läßt A ebenfalls invariant und hat $\bar{V}$ als charakteristische Funktion. So haben wir bloß $\zeta_1, \ldots \zeta_{2m}$ zu bestimmen aus:

$$84) \quad \sum\limits_1^{2m}{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, \ldots 2m.$$

Diese Gleichungen ergeben aufgelöst, falls wir beibehalten: $A = (1, 2, \ldots 2m)$:

85) $$A\,\xi_\nu = \sum_1^{2m}{}_\mu A_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial x_\mu}.$$

Wir erhalten daher:

86) $$Z(f) = \sum_1^{2m}{}_{\mu,\nu}\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{A_{\mu\nu}}{A}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation lautet somit in diesem Falle:

87) $$Y(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m}{}_j\,\eta_{2m+j}\,X_j(f).$$

Zweiter Teil: Infinitesimale Transformationen, die einen Pfaffschen Ausdruck invariant lassen modulo eines vollständigen Differentials.

§ 9.

Wir suchen hier die infinitesimalen Transformationen, vermöge deren besteht: $X(\Delta) = d\omega$ und behandeln zunächst den Fall $n = 2m$ und $(1, 2, \ldots 2m) \neq 0$. Ist U die charakteristische Funktion, so setzen wir:

$$U + \omega = \Phi.$$

Unser System von Bedingungsgleichungen lautet sodann:

88)
$$\begin{cases} \text{a)} & \sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{o\nu}\,\xi_\nu = -\,U \\ \text{b)} & \sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\mu\nu}\,\xi_\nu = \dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\mu} \end{cases}$$

gemäß § 2 II. Setzt man $(1, 2, \ldots 2m) = (1, \ldots n) = A$, so ergibt die Auflösung von 88 b) nach gewöhnlicher Art:

$$\xi_\lambda = \sum_1^{2m}{}_\mu\,\frac{A_{\mu\lambda}}{A}\cdot\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\mu}.$$

Diese Werte in 88 a) substituiert ergibt die partielle Differentialgleichung:

$$\sum_1^{2m}{}_\nu\,\alpha_{o\nu}\sum_1^{2m}{}_\mu\,\frac{A_{\mu\nu}}{A}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\mu} = -\,U$$

89) $$\sum_1^{2m}{}_\mu\,\frac{B_{\mu o}}{A}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_\mu} = -\,U.$$

Hier ist sowohl Φ als auch U unbekannt. Eine Unbekannte kann man daher willkürlich wählen. Um Integrationen zu vermeiden ist es angebracht, Φ willkürlich zu nehmen und bestimmt sich dann U sofort durch Differentiationen. Ist sodann aus dem gewählten $\bar{\Phi}$ $\bar{U}$ bestimmt, so ergibt sich $\bar{\omega}$ aus:

$$\bar{U} + \bar{\omega} = \bar{\Phi}.$$

Die infinitesimale Transformation lautet in diesem Falle:

90) $$X(f) = \sum_{1}^{n}{}_{\mu,\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

und zwar ergibt sich:

$$X(\Delta) \quad d\left(\bar{\Phi} + \sum_{\mu,\nu}^{1,\ldots,n} \alpha_{o\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}_\mu} \right).$$

Anmerkung: Haben wir im speziellen $U = 0$, so ergibt sich unter sonst gleichen Voraussetzungen für ξ_λ:

$$A\,\xi_\lambda = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} A_{\mu\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \qquad \lambda = 1, \ldots n,$$

während 89) wird:

91) $$\sum_{1}^{2m}{}_{\mu} B_{\mu o} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = 0.$$

Unter $\bar{\omega}$ eine Funktion der $n - 1$ Lösungen 91) verstanden, ergibt in diesem Falle die infinitesimale Transformation:

$$X(f) = \sum_{1}^{n}{}_{\mu,\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

§ 10.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, in dem eine ganze Zahl m von der Beschaffenheit existiert, daß mindestens ein Ausdruck $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$ z. B. $(0, 1, \ldots 2m - 1)$ verschieden von Null ist, während alle Ausdrücke $(\mu_1, \ldots \mu_{2m}) = 0$ sind, unter μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_{2m}$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$ verstanden. Ferner sei $(1, 2, \ldots 2m - 2) \neq 0$. Den Pfaffschen Ausdruck Δ können wir somit identisch mit dem Pfaffschen Ausdruck Δ des § 5 annehmen. Diesen Fall gliedern wir wieder in a) und b), indem wir unter a) annehmen, daß die charakteristische Funktion $U = 0$ ist, welche Voraussetzung wir unter b) fallen lassen.

a) Unsere Bedingungsgleichungen werden hier gemäß 28):

$$92)\quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \, \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Hier finden wir aber unser System 50) wieder, und zwar sind die $\partial\, V / \partial\, x_\mu$ von 50) ersetzt durch $\partial\, \omega / \partial\, x_\mu$ und V selbst durch Null. Setzen wir auch in 92) die linken Seiten gleich $H_0, H_1, \ldots H_n$, so bestehen ebenfalls wie zwischen den linken Seiten von 50), falls:

$$A \equiv (0, 1, \ldots 2m - 1)$$
$$A' \equiv (1, 2, \ldots 2m - 2)$$

ist, die Relationen 52) und 53):

$$93)\quad \begin{cases} A\, H_{2m-1+j} - \sum_1^{2m-1}{}_\mu \, B_{\mu j}\, H_\mu \\ A'\, H_{2m-1} - \sum_1^{2m-2}{}_\mu \, B'_{\mu\, 2m-1}\, H_\mu \,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die linken Seiten von 93) mit $X_j(f)$, $_{j=1,\ldots n-2m+1}$, $H(f)$, so haben wir in $H(f)$ $X_j(f)$, $_{j=1,\ldots n-2m+1}$ wiederum das vollständige System, das wir in § 6 nachgewiesen haben. Haben wir $\bar{\omega}$ als eine Funktion der $2m - 2$-Lösungen dieses Systems gefunden, so können wir leicht alle infinitesimalen Transformationen für diesen Fall angeben. Setzen wir:

$$94)\quad \begin{cases} Z(f) = X(f) - \sum_1^{n-2m}{}_j \, \xi_{2m-1+j}\, X_j(f) \\ \qquad = \sum_1^n{}_\mu \, \zeta_\mu \, \dfrac{\partial\, f}{\partial\, x_\mu}, \end{cases}$$

so sind alle $\zeta_{2m}, \ldots \zeta_n$ Null. $Z(f)$ läßt Δ ebenfalls modulo eines vollständigen Differentials invariant und hat Null als charakteristische Funktion. Es sind somit die Gleichungen:

$$95)\quad \begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^{2m-1}{}_\nu \, \alpha_{o\nu}\, \zeta_\nu = 0 \\ \text{b)} \quad \sum_1^{2m-1}{}_\nu \, \alpha_{\mu\nu}\, \zeta_\nu = \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots, 2m - 1$$

zu erfüllen. Setzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen gleich $F_0, F_1, \ldots F_{2m-1}$ und bilden wir:

$$\sum_0^{2m-1}{}_\mu F_\mu A_{\mu\lambda} = \sum_1^{2m-1}{}_\nu \sum_0^{2m-1}{}_\mu A_{\mu\lambda}\alpha_{\mu\nu}\zeta_\nu$$
$$= \sum_1^{2m-1}{}_\nu E_{\lambda\nu} A,$$

so folgt durch Substitution der Werte der rechten Seiten:

$$\sum_0^{2m-1}{}_\mu F_\mu A_{\mu\lambda} = \sum_1^{2m-1}{}_\mu A_{\mu\lambda}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_\mu}.$$

Daher ergibt sich:

96) $$\zeta_\nu A = \sum_1^{2m-1}{}_\mu A_{\mu\nu}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_\mu} \qquad \nu = 1, \ldots 2m-1$$

und es wird:

97) $$Z(f) = \sum_1^{2m-1}{}_{\nu,\mu}\frac{A_{\mu\nu}}{A}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_\mu}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Als allgemeinste infinitesimale Transformation für diesen Pfaffschen Ausdruck erhalten wir somit, falls die charakteristische Funktion verschwindet:

98) $$X(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m+1}{}_j \xi_{2m-1+j} X_j(f).$$

b) Unter der Voraussetzung, daß wir denselben Pfaffschen Ausdruck A wie unter a) haben, wollen wir jetzt die charakteristische Funktion als verschieden von Null annehmen. V sei diese charakteristische Funktion und es sei: $V + \omega = \Phi$. Somit werden unsere Bedingungsgleichungen:

99)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{o\nu}\eta_\nu = -V \\ \text{b)} \quad \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu\nu}\eta_\nu = \frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}. \end{cases}$$

Setzen wir die linken Seiten dieser Gleichungen gleich G_0, $G_1, \ldots G_n$, so lassen sich ebenfalls die Relationen 93) ableiten. Substituieren wir sodann die Werte der rechten Seiten, so kommen wir auf die Relationen 93'):

100)
$$\begin{cases} A\frac{\partial\Phi}{\partial x_{2m-1+j}} - \sum_1^{2m-1}{}_\mu B_{\mu j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu} = 0 \\ A'\frac{\partial\Phi}{\partial x_{2m-1}} - \sum_1^{2m-2}{}_\mu B'_{\mu,2m-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu} = 0 \end{cases} \qquad j = 1, \ldots n-2m+1.$$

Diese homogenen partiellen Differentialgleichungen bilden aber ein unbeschränkt integrables System, wie wir § 6 zeigten. Setzen wir die linken Seiten von 100) gleich $X_1(f), \ldots X_{n-2m+1}(f)$,

$H(f)$ und ist $\bar{\Phi}$ eine Funktion der $(2m-2)$-Lösungen dieses Systems, so können wir bilden:

$$Z(f) = X(f) - \sum_1^{n-2m+1 j} \xi_{2m-1+j} X_j(f)$$

$$= \sum_1^n{}_\nu \zeta_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Hier ist auch $\zeta_{2m}, \ldots \zeta_n$ Null. $Z(f)$ läßt ebenfalls Δ modulo eines vollständigen Differentials invariant. Jetzt haben wir bloß $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{2m-1}$ zu bestimmen aus:

101)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad \sum_1^{2m-1}{}_\nu \alpha_{o\nu} \zeta_\nu = -V \\ \text{b)} \quad \sum_1^{2m-1}{}_\nu \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_\mu}. \end{cases}$$

Aus 101) folgt entsprechend der Bestimmung der Unbekannten aus 62):

$$A\zeta_\nu = -VA_{o\nu} + \sum_1^{2m-1\mu} A_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_\mu} \qquad \nu = 1, \ldots 2m-1$$

und es ergibt sich:

$$Z(f) = \sum_1^{2m-1}{}_\nu \left(-\frac{VA_{o\nu}}{A} + \sum_1^{2m-1\mu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Hierbei ist V willkürlich, jedoch mit ω durch:

$$V + \omega = \bar{\Phi}$$

verbunden. Die allgemeinste infinitesimale Transformation lautet somit in diesem Falle:

$$X(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m+1 j} \eta_{2m-1+j} X_j(f).$$

§ 11.

Wir kommen jetzt noch zu dem Fall, in dem zu n eine ganze Zahl m von der Beschaffenheit gehört, daß neben mindestens einem Ausdruck $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m-1})$ auch mindestens ein Ausdruck $(\mu_1, \ldots \mu_{2m})$ von Null verschieden ist. Ohne die Allgemeinheit zu verletzen, können wir annehmen, daß neben $(0, 1, 2, \ldots 2m-1)$ auch $(1, 2, \ldots 2m)$ von Null verschieden ist. Hingegen verschwinden alle Ausdrücke $(0, \mu_1, \ldots \mu_{2m+1})$, $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{2m+2})$, unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{2m+2}$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$ verstanden. Gliedern wir diesen Fall wieder, indem wir unter a) die charakteristische Funktion als Null annehmen, während im Falle b) die charakteristische Funktion nicht verschwindet, so haben wir zunächst folgende Bedingungsgleichungen für:

a)

$$102) \quad \begin{cases} \text{a)} & \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_{o\nu}\, \xi_\nu = 0 \\ \text{b)} & \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\nu = \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_\mu} \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Da der hier behandelte Pfaffsche Ausdruck Δ dieselben Eigenschaften hat wie der wie in § 7 betrachtete, kommen wir zu denselben Bedingungsgleichungen wie § 7 b), und zwar sind in den dort erhaltenen Bedingungsgleichungen 73) die $\partial\, V / \partial\, x_\mu$ durch die $\partial\, \omega / \partial\, x_\mu$ zu ersetzen und V selbst durch Null. Bezeichnen wir die linken Seiten von 102) mit $G_0, G_1, \ldots G_n$, so ergibt sich demzufolge das Bestehen der Relationen:

$$A\, G_{2m+j} = \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu j}\, G_\mu$$

$$A\, G_0 \quad = \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu o}\, G_\mu,$$

falls $A = (1, 2, \ldots 2m)$ ist. Die Werte der rechten Seite von 102) substituiert ergibt:

$$103) \quad \begin{cases} A\, \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu j}\, \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_\mu} = 0 \\ \sum_1^{2m}{}^{\mu} B_{\mu o}\, \dfrac{\partial\, \omega}{\partial\, x_\mu} = 0 \end{cases} \qquad j = 1, \ldots n - 2m.$$

Hier erblicken wir aber das $(n - 2m + 1)$-gliedrige System 81) wieder, von dem wir § 8 nachgewiesen haben, daß es ein vollständiges System ist. Ist $\bar{\omega}$ als eine Funktion der $(2m - 1)$-Lösungen unseres Systems bestimmt, so setzen wir:

$$Z(f) = X(f) - \sum_1^{n-2m}{}^{j} \xi_{2m+j}\, X_j(f),$$

unter $X_j(f)$ die infinitesimalen Transformationen:

$$X_j(f) = \frac{\partial\, f}{\partial\, x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}^{\mu} \frac{B_{\mu j}}{A}\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x_\mu} \qquad j = 1, \ldots n - 2m$$

verstanden. Es ist in:

$$Z(f) = \sum_1^n{}^{\nu} \zeta_\nu\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x_\nu}$$

$\zeta_{2m+1}, \ldots \zeta_n$ Null. $Z(f)$ läßt ebenfalls Δ modulo eines vollständigen Differentials invariant und hat Null als charakteristische Funktion. So haben wir $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{2m}$ zu bestimmen aus:

$$\sum_1^{2m}{}^{\mu} \alpha_{\mu\nu}\, \zeta_\nu = \frac{\partial\, \bar{\omega}}{\partial\, x_\mu} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, 2m.$$

Diese Gleichungen ergeben aufgelöst, falls:

$$A \equiv (1, 2, \ldots 2m)$$

104) $$A\,\zeta_\nu = \sum_1^{2m}{}_\mu\, A_{\mu\nu} \frac{\partial\, \bar{\omega}}{\partial\, x_\mu}.$$

Somit wird:

105) $$Z(f) = \sum_1^{2m}{}_{\nu\ \mu}\, \frac{\partial\, \bar{\omega}}{\partial\, x_\mu}\, \frac{A_{\mu\nu}}{A}\, \frac{\partial\, f}{\partial\, x_\nu}.$$

Die infinitesimale Transformation $X(f)$ lautet daher, falls die charakteristische Funktion Null ist:

$$X(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m}{}_j\, \xi_{2m+j}\, X_j(f)$$

und es wird:

$$X(\Delta) = d\,\bar{\omega}\,(x_1, \ldots x_n).$$

b) Betrachten wir schließlich den Fall, wo die charakteristische Funktion V von Null verschieden ist, so sei:

$$V + \omega \equiv \Phi.$$

Unsere Bedingungsgleichungen lauten daher:

106)
$$\begin{cases} \text{a)} & \sum_1^{n}{}_\nu\, \alpha_{o\nu}\, \eta_\nu = -\ V \\ \text{b)} & \sum_1^{n}{}_\nu\, \alpha_{\mu\nu}\, \eta_\nu = \quad \dfrac{\partial\, \Phi}{\partial\, x_\mu}. \end{cases}$$

Die linken Seiten von 106) gleich $G_0, G_1, \ldots G_n$ gesetzt, gibt auch hier:

$$A\, G_{2m+j} = \sum_1^{2m}{}_\mu\, B_{\mu j}\, G_\mu$$

$$A\, G_0 \quad\ = \sum_1^{2m}{}_\mu\, B_{\mu o}\, G_\mu$$

oder durch Substitution der rechten Seiten:

107)
$$\begin{cases} \text{a)} & A\, \dfrac{\partial\, \Phi}{\partial\, x_{2m+j}} - \sum_1^{2m}{}_\mu\, B_{\mu j}\, \dfrac{\partial\, \Phi}{\partial\, x_\mu} = 0 \\ \text{b)} & A\, V + \sum_1^{2m}{}_\mu\, B_{\mu o}\, \dfrac{\partial\, \Phi}{\partial\, x_\mu} = 0 \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots n - 2m$$

107 a) ist, wie wir in § 7 a) nachgewiesen haben, ein $(n-2m)$-gliedriges vollständiges System. 107 a) ist nämlich identisch mit System 72). Bestimmen wir daher Φ als eine Funktion der $2m$-Lösungen dieses Systems, so bestimmt sich durch Substitution der Ableitungen von Φ in 107 b) V zu $\bar{V}$ ohne Integration. Setzen

wir daher die linken Seiten von 107 a) gleich $X_j(f)$, $j = 1, \ldots n - 2m$ und bilden wir:

$$Z(f) = X(f) - \sum_1^{n-2m} j \, \xi_{2m+j} X_j(f)$$

$$Z(f) = \sum_1^n \mu \, \zeta_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu},$$

so sind $\zeta_{2m+1}, \ldots \zeta_n$ Null. $Z(f)$ entspricht ebenfalls den gestellten Anforderungen. Da wir in den ζ das System haben:

$$\sum_1^{2m} \nu \, \alpha_{\mu\nu} \zeta_\nu = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, \ldots n,$$

also dasselbe System wie unter a), so wird:

$$Z(f) = \sum_1^{2m} \mu, \nu \, \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

und die allgemeinste infinitesimale Transformation wird in diesem Falle:

$$Y(f) = Z(f) + \sum_1^{n-2m} j \, \eta_{2m+j} X_j(f),$$

wobei:

$$Y(\Delta) = d\,\Phi - d\,V = d\,\bar{\omega}$$

ist. — Wir sind hiermit an das Ende unserer Betrachtungen gelangt. Es ist uns gelungen, sämtliche infinitesimale Transformationen zu bestimmen, welche einen beliebig gegebenen Pfaffschen Ausdruck entweder absolut oder modulo eines vollständigen Differentials invariant lassen. Dies Ziel ist erstens erreicht worden durch Anwendung der in spezieller Form bereits von Prof. Engel gefundenen Identität:

$$X(V) + Y(U) = c_2 U + c_1 V + Y(u) + X(v),$$

falls U und V die charakteristischen Funktionen zweier infinitesimalen Transformationen $X(f)$ und $Y(f)$ sind, für welche besteht:

$$X(\Delta) \equiv c_1 \Delta + d\,u$$

$$Y(\Delta) \equiv c_2 \Delta + d\,v$$

und weiter durch konsequente Verwertung gewisser Scharen infinitesimaler Transformationen, die mit dem Pfaffschen Ausdruck Δ invariant verknüpft sind. Dadurch ist es uns möglich geworden, unsere Aufgabe zu lösen, ohne vorauszusetzen, daß Δ auf seine Normalform gebracht worden ist, wie es Herr v. Weber in der von ihm ausgeführten Arbeit tut.

Lebenslauf.

Unterzeichneter, Franz Richard Winkler, wurde am 29. März 1878 zu Leipzig als Sohn des Buchhalters im dortigen städtischen Krankenhause, Herrn Clemens Winkler, geboren. Gemäß der Religion seiner Eltern wurde er nach den Lehren der evangelisch-lutherischen Kirche erzogen. Leider verlor er schon in früher Jugend seinen Vater.. Seine Mutter ermöglichte ihm den Besuch des Realgymnasiums zu Leipzig, welche Schule er im Jahre 1898 mit dem Reifezeugnis verließ.

Unterzeichneter wandte sich nach hiesiger Universität, um hier besonders Mathematik und Physik zu studieren. Zu Anfang seines Studiums hörte er noch Prof. Lie in dem letzten Semester von dessen Wirksamkeit an hiesiger Universität. Er wandte sich später, durch Prof. Engel angeregt, besonders dessen Lehren zu. Weiter hörte er noch an mathematischen Vorlesungen solche von Prof. Mayer und Prof. Hölder.

Am 15. Mai 1903 bestand Unterzeichneter vor der königlichen Prüfungskommission für Kandidaten des höheren Schulamtes zu Leipzig die Staatsprüfung. Als Kandidat des höheren Schulamtes wurde er von dem hohen königlichen Ministerium des Kultus dem Königin Carola-Gymnasium zu Leipzig überwiesen, an welcher Schule Unterzeichneter jetzt noch als Vikar tätig ist.

Leipzig, den 9. Mai 1904.

Franz Winkler.